

6.5 CRITÈRE DE BODE

6.5.1 Critère du revers.

Le critère du revers s'énonce comme suit dans le plan de Bode, ou dans l'espace fréquentiel: *Un système asservi (en boucle fermée) est stable si la courbe du module de sa réponse harmonique en boucle ouverte $|G_0(j\omega)|$ coupe l'axe de module unité pour une phase $\arg(G_0(j\omega))$ supérieure à -180° .*

6.5.2 Relation de Bode et Bayard.

L'expression (5.5) de la réponse harmonique peut être appliqué à la fonction $G_0(j\omega)$.

$$\ln(G_0(j\omega)) = \ln|G_0(j\omega)| + j \arg(G_0(j\omega)) \quad (6.18)$$

La relation de Bayard et Bode exprime une relation entre la partie réelle et la partie imaginaire d'une fonction complexe $F(jx)$ [6]. De surcroît, si celle-ci est rationnelle en jx , la relation se simplifie notablement.

$$\operatorname{Im}(F(jx)) = \frac{\pi}{2} \frac{d(\log(\operatorname{Re}(F(jx))))}{d(\log x)} \quad (6.19)$$

On peut appliquer (6.19) à la fonction $G_0(j\omega)$, en désignant par $P(\omega_x)$ la pente du module à la pulsation ω_x pour un diagramme double logarithmique (§ 5.4.1).

$$\varphi(\omega) = \arg(G_0(j\omega)) = \frac{\pi}{2} P(\omega) \quad (6.20)$$

La relation (6.20) reste le plus souvent valable lorsque le module de la réponse harmonique est approximé par droites. On prendra toutefois garde aux systèmes mal amortis pour lesquels un raisonnement sur l'approximation par droites peut conduire à des conclusions erronées (fig. 5.9).

6.5.3 Critère du Bode: énoncé.

Le critère du revers peut être simplifié en appliquant la relation ci-dessus. *Un système asservi (en boucle fermée) est stable si la courbe du module de sa réponse harmonique en boucle ouverte $|G_0(j\omega)|$ coupe l'axe de module unité pour une pente supérieure à -2 .*

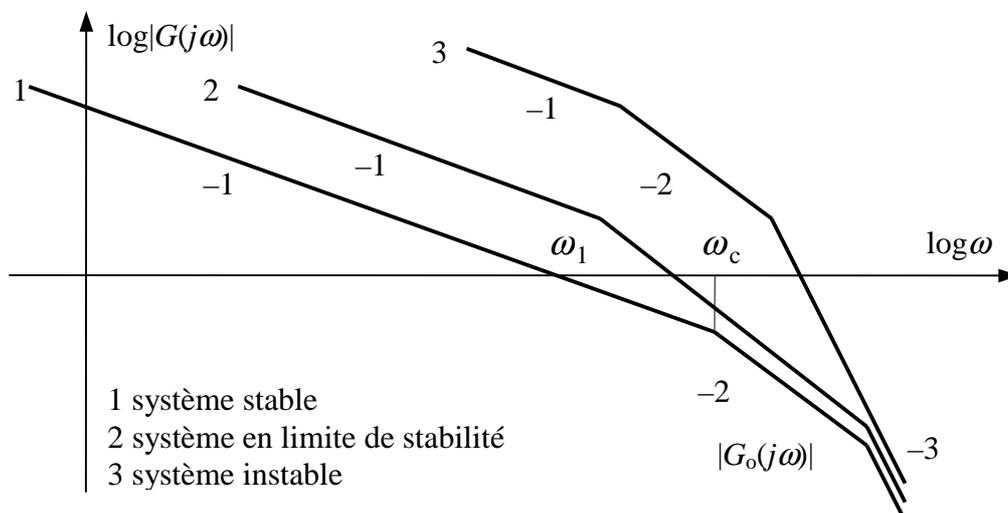


Fig. 6.10 Stabilité dans le plan de Bode.

Si l'intersection de la réponse harmonique en boucle ouverte et de l'axe à 10^0 a lieu avec une pente de -1 , le système en boucle fermée est stable, avec -2 , il est en limite de stabilité. Il est judicieux d'affiner le critère en exprimant la qualité de la stabilité: "à quelle distance de la pente -2 " doit-on placer l'intersection de l'axe avec la pente -1 ?

6.5.4 Relation entre plan fréquentiel et comportement temporel.

Le critère de Bode s'applique à un système en boucle fermée fondamental du 2^e ordre, dans lequel la boucle ouverte contient une intégration pure.

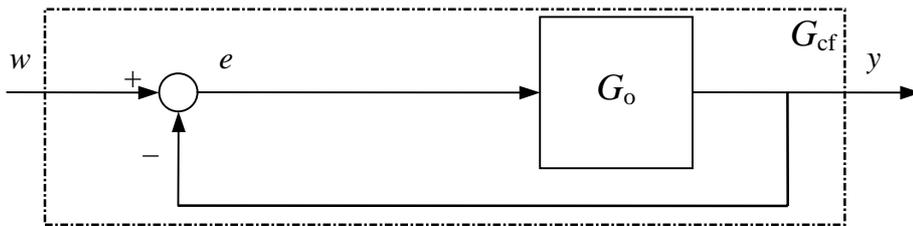


Fig. 6.11 Système en boucle fermée.

$$G_o(s) = \frac{\omega_1}{s(1 + s\frac{1}{\omega_c})} \tag{6.21}$$

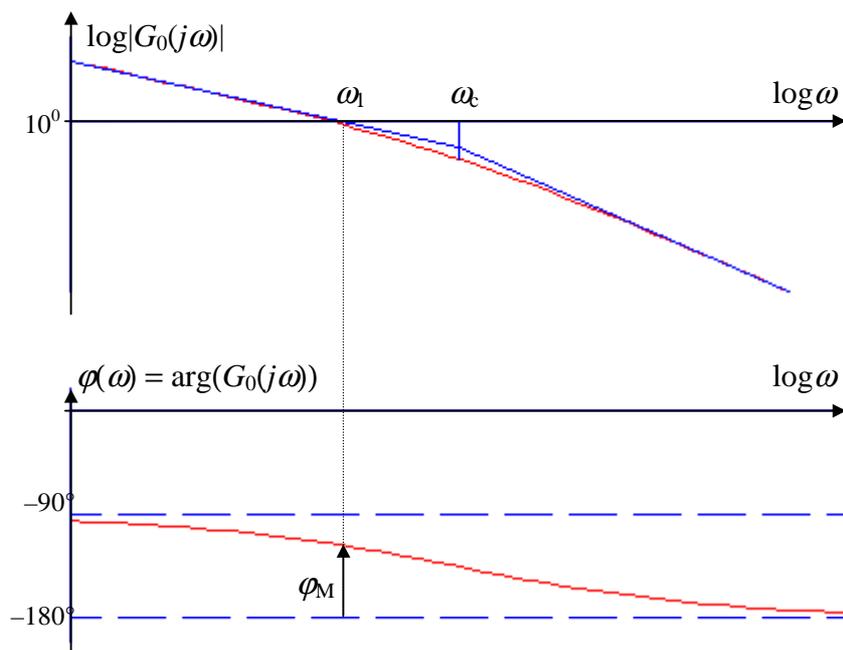


Fig. 6.12 Réponse harmonique dans le plan de Bode.

En introduisant (6.21) dans (6.1), on obtient la fonction de transfert en boucle fermée du système présenté à la figure 6.11 et connu par sa fonction de transfert en boucle ouverte.

$$G_{cf}(s) = \frac{1}{1 + s\frac{1}{\omega_1} + s^2\frac{1}{\omega_1\omega_c}} \tag{6.22}$$

On obtient bien un système fondamental du deuxième ordre, qu'on peut comparer à celui étudié au chapitre 4 selon la relation (4.37) à laquelle on fixe un gain statique de 1.

$$G_{cf}(s) = \frac{1}{1 + s \frac{2\delta}{\omega_0} + s^2 \frac{1}{\omega_0^2}} \quad (6.23)$$

Par identification entre (6.22) et (6.23), on exprime la pulsation propre et le facteur d'amortissement.

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_1 \omega_c} \quad (6.24)$$

$$\delta = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\omega_c}{\omega_1}} \quad (6.25)$$

Pour la réponse indicielle en boucle fermée, on reprend les calculs du chapitre 4, en introduisant (6.24) et (6.25) dans (4.46).

$$\gamma_{cf}(t) = 1 - \left(\cos \omega_p t + \frac{1}{\sqrt{4 \frac{\omega_1}{\omega_c} - 1}} \sin \omega_p t \right) e^{-\frac{\omega_0}{2} \sqrt{\frac{\omega_c}{\omega_1}} t} \quad (6.26)$$

$$\omega_p = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{\omega_c}{4 \omega_1}} = \frac{\omega_c}{2} \sqrt{4 \frac{\omega_1}{\omega_c} - 1} \quad (6.27)$$

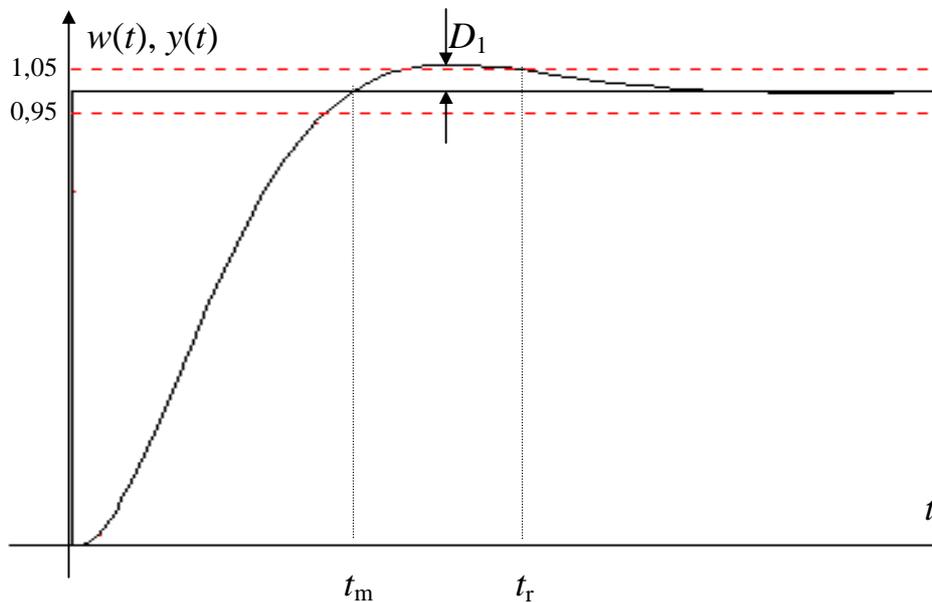


Fig. 6.13 Réponse indicielle en boucle fermée.

On peut exprimer le dépassement et le temps de montée en utilisant les résultats (4.52) et (4.58).

$$D_1 = e^{\frac{-\pi}{\sqrt{4 \frac{\omega_1}{\omega_c} - 1}}} \quad (6.28)$$

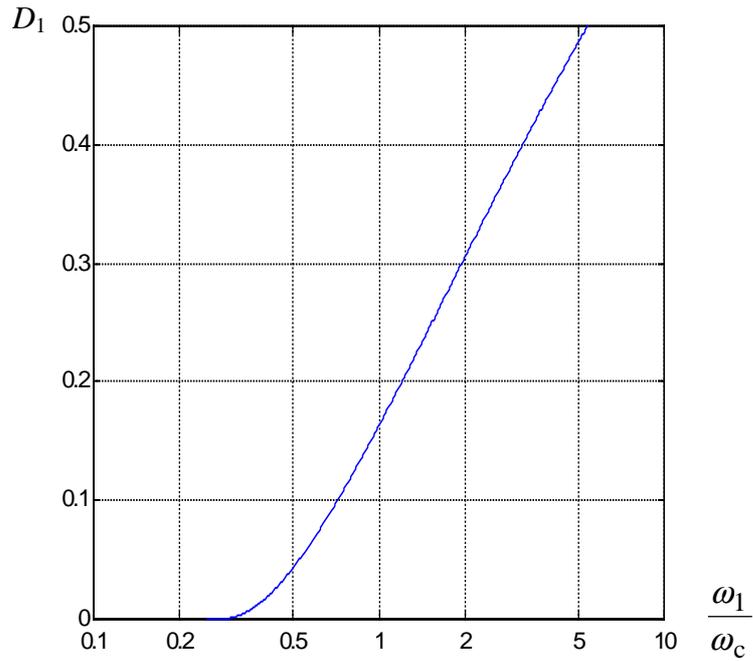


Fig. 6.14 Dépassement en fonction du rapport de pulsation.

$$t_m = \frac{2}{\omega_c \sqrt{4 \frac{\omega_1}{\omega_c} - 1}} (\pi - \arctan \sqrt{4 \frac{\omega_1}{\omega_c} - 1}) \quad (6.29)$$

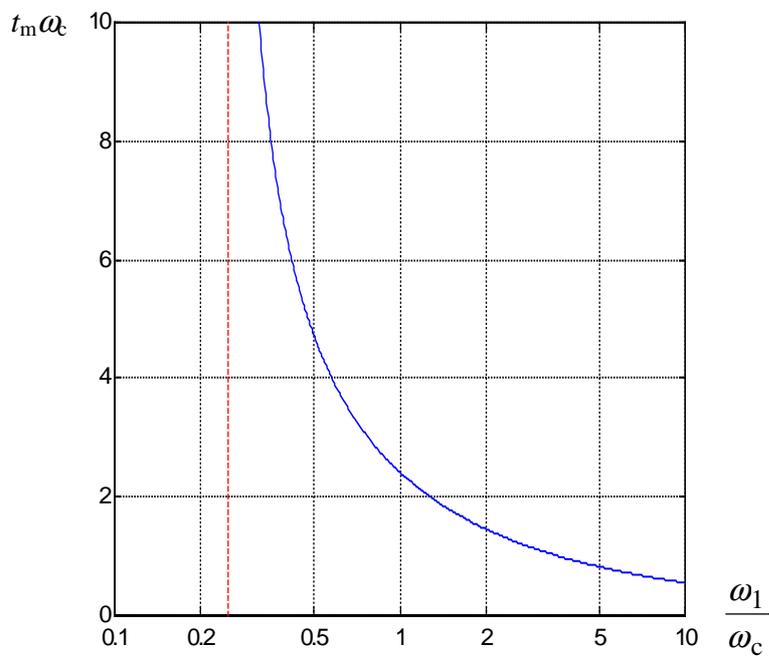


Fig. 6.15 Temps de montée en fonction du rapport de pulsation.

Pour le temps de réponse, le calcul est fastidieux et on se contentera de donner les valeurs typiques.

A partir de la relation (6.28), on peut exprimer le rapport de pulsation qu'il faut observer sur la réponse harmonique en boucle ouverte pour garantir sur la réponse indicielle en boucle fermée un dépassement inférieur ou égal à $D_{1\max}$ prescrit par le cahier des charges.

$$\frac{\omega_c}{\omega_1} = \frac{4}{1 + \left(\frac{\pi}{\ln D_1}\right)^2} \quad (6.30)$$

La phase en boucle ouverte peut être calculée de (6.21).

$$\begin{aligned} \varphi(\omega) &= \arg\left(\frac{\omega_1}{j\omega}\right) + \arg\left(\frac{1}{1 + j\frac{\omega_1}{\omega_c}}\right) \\ &= -90^\circ - \arctan\frac{\omega}{\omega_c} \end{aligned} \quad (6.31)$$

On en déduit la marge de phase selon (6.14), en introduisant (6.30).

$$\begin{aligned} \varphi_M &= 180^\circ + \varphi(\omega_1) = 90^\circ - \arctan\frac{\omega}{\omega_c} \\ &= 90^\circ - \arctan\frac{1 + \left(\frac{\pi}{\ln D_1}\right)^2}{4} \end{aligned} \quad (6.32)$$

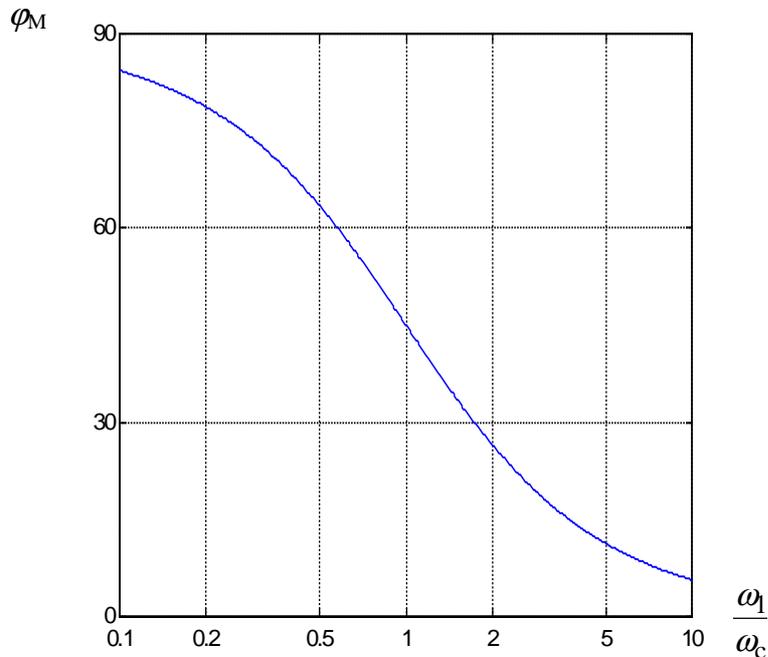


Fig. 6.16 Marge de phase en fonction du rapport de pulsation.

Si on met en regard les figures 6.14 et 6.15, on constate qu'on ne peut pas simultanément minimiser le dépassement et le temps de réponse (ou de réponse) mais qu'on doit accepter un compromis. Pour les processus industriels, on requiert souvent un dépassement inférieur à 10 %, pour éviter des transitoires trop élevées pouvant détruire des semi-conducteurs: $\omega_l/\omega_c < 0,7$. Pour éviter un temps de réponse trop grand, on prend un rapport assez élevé: $\omega_l/\omega_c > 0,4$.

Si on demande un dépassement de 4,3 %, on obtient une réponse indicielle optimale: avec ce dimensionnement, on obtient pour une valeur donnée de ω_c le temps de réponse le plus court possible. C'est donc souvent ce choix qui est retenu.

$$\frac{\omega_c}{\omega_l} = 2 \quad t_m = \frac{4,71}{\omega_c} \quad t_r = \frac{4,2}{\omega_c} \quad \varphi_M = 63,5^\circ \quad (6.33)$$

Pour éviter tout dépassement, on a un dimensionnement différent.

$$\frac{\omega_c}{\omega_l} = 4 \quad t_m = \infty \quad t_r = \frac{9}{\omega_c} \quad \varphi_M = 76^\circ \quad (6.34)$$

Si on accepte un dépassement de 16,3 %, on obtient une réponse indicielle apériodique.

$$\frac{\omega_c}{\omega_l} = 1 \quad t_m = \frac{2,5}{\omega_c} \quad t_r = \frac{5}{\omega_c} \quad \varphi_M = 45^\circ \quad (6.35)$$

Ces valeurs typiques sont récapitulées à l'annexe 6A. On a l'habitude d'étendre le critère de Bode à tous les systèmes, en raisonnant autour de la pulsation ω_c , en admettant que la pente de -1 se prolonge suffisamment loin sur la gauche pour qu'on puisse l'approximer par une intégration et que la pente de -2 se prolonge suffisamment loin sur la droite pour que l'effet des autres valeurs de pente puisse être négligé.

6.5.5 Tracé de Bode assisté

La fonction `affbod.m`, écrite sous *MATLAB* au Laboratoire d'Automatique de l'EIG permet de faire tracer la réponse harmonique dans le plan de Bode. On doit spécifier la fonction de transfert: numérateur et dénominateur à écrire en chaîne de caractères, sous la forme factorisée de Bode. On doit encore indiquer la plage de pulsation à tracer. Sur le tracé exact, la pulsation ω_c n'est pas aisée à déterminer car il n'y a pas de cassure. On utilise la propriété de Bayard et Bode pour la trouver: pour une pente de -1 , la phase est de -90° , pour une pente de -2 , la phase est de -180° ; comme la pulsation ω_c est à la frontière de ces deux pentes on prendra la pulsation pour laquelle on lit une phase de -135° , soit la moyenne des phases à gauche et à droite. Ayant trouvé ω_c , on peut mettre en œuvre la relation entre le dépassement D_1 de la réponse indicielle et le rapport de pulsation. Par exemple un rapport $\omega_c/\omega_l = 2$ pour $D_1 = 4,3\%$. On peut aussi appliquer le critère de la marge de phase. Par exemple $\varphi_M = 63,5^\circ$ pour $D_1 = 4,3\%$. Les deux méthodes donnent des résultats légèrement différents. De même le rapport de pulsation appliqué sur le module approximé par segments de droites ne donne pas exactement le même résultat que sur le module exact.

